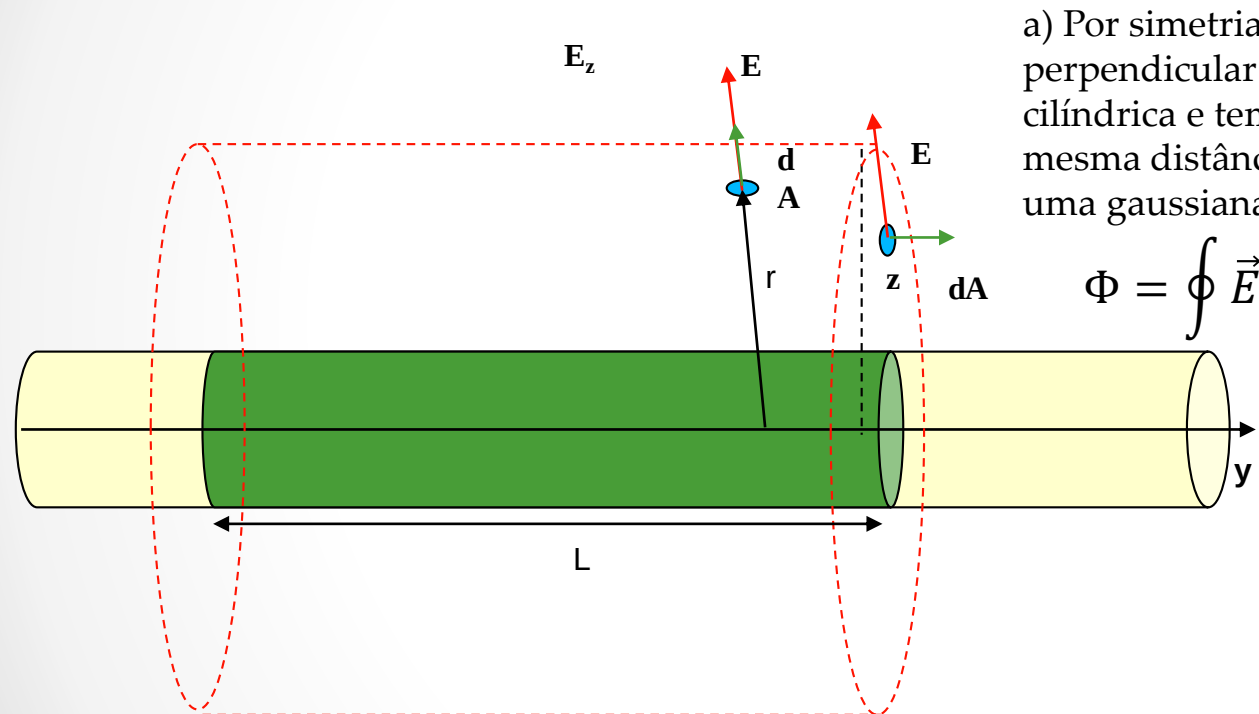


- 1) Considere duas cascas cilíndricas condutoras concêntricas ρ_a e ρ_b , com os respectivos eixos coincidentes com o eixo z e distribuição de cargas dadas por ρ_{Sa} e ρ_{Sb} . Considere que há um dielétrico de permissividade relativa k entre essas cascas e que nas demais regiões o meio é o espaço livre. A casca externa possui potencial 0. Para esse caso:
- a) Encontre uma expressão para o campo elétrico para toda região do espaço (incluindo o interior da casca interna, a região intermediária e fora da casca externa).
 - b) Encontre uma expressão para o potencial elétrico para toda região do espaço.
 - c) Calcule a capacitância por unidade de comprimento nesse caso.
 - d) Calcule o trabalho realizado para se deslocar uma carga unitária entre os pontos C ($\rho_c, 0, 0$) e D ($\rho_c, \pi/2, 0$).



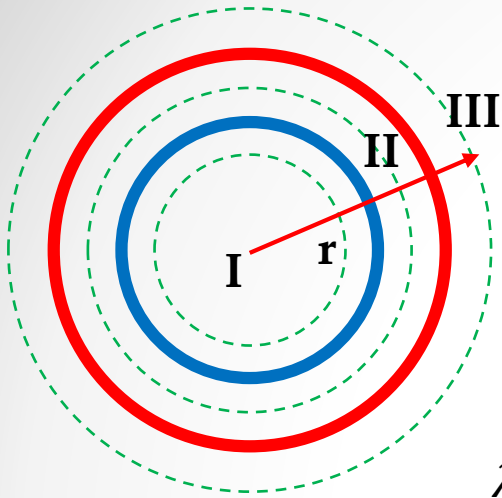
a) Por simetria o campo elétrico é perpendicular ao eixo de simetria da casca cilíndrica e tem o mesmo módulo à uma mesma distância do eixo, assim, traçamos uma gaussiana cilíndrica.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{Lat} E dS = E 2\pi r L$$

Pela Lei de Gauss $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{Int}}{\epsilon_0}$ $E 2\pi r L = \frac{q_{Int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$ $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$

Continua

Continuação a)



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{Esta expressão independe de que região traçamos a gaussiana.}$$

Assim:

$$E_I = 0 \quad \text{pois não há carga interna e o módulo do campo é proporcional à quantidade de carga neste caso.}$$

$$E_{II} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \text{ mas } \lambda = \frac{q}{L} = \frac{\rho_{Sa} 2\pi\rho_a L}{L} = \rho_{Sa} 2\pi\rho_a \rightarrow E_{II} = \frac{\rho_{Sa}\rho_a}{\epsilon_0 r}$$

$$E_{III} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \text{ mas } \lambda = \frac{q}{L} = \frac{\rho_{Sa} 2\pi\rho_a L + \rho_{Sb} 2\pi\rho_b L}{L} = \rho_{Sa} 2\pi\rho_a + \rho_{Sb} 2\pi\rho_b$$

$$E_{III} = \frac{\rho_{Sa}\rho_a + \rho_{Sb}\rho_b}{\epsilon_0 r}$$

$$b) \quad V_{III} - V_{\rho_b} = - \int_{\rho_b}^r \frac{\rho_{Sa}\rho_a + \rho_{Sb}\rho_b}{\epsilon_0 r} dr \quad V_{III} = - \frac{\rho_{Sa}\rho_a + \rho_{Sb}\rho_b}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{\rho_b} < 0$$

$$V_{II} - V_{\rho_b} = - \int_{\rho_b}^r \frac{\rho_{Sa}\rho_a}{\epsilon_0 r} dr \rightarrow V_{II} = - \frac{\rho_{Sa}\rho_a}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{\rho_b} > 0$$

$$\text{Como na região I } E = 0 \quad V_I - V_{\rho_a} = 0 \rightarrow V_I = - \frac{\rho_{Sa}\rho_a}{\epsilon_0} \ln \frac{\rho_a}{\rho_b}$$

Continua

Continuação

c) Como na região II

$$V_{II} - V_{\rho_b} = -\frac{\rho_{Sa}\rho_a}{\varepsilon_0} \ln \frac{r}{\rho_b} \rightarrow V_{\rho_a} - V_{\rho_b} = -\frac{\rho_{Sa}\rho_a}{\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{\rho_{Sa}\rho_a}{\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_b}{\rho_a}$$

mas

$$\Delta V = \frac{q}{C} \rightarrow C = \frac{q\varepsilon_0}{\rho_{Sa}\rho_a \ln \frac{\rho_b}{\rho_a}} \text{ mas } q = \rho_{Sa}2\pi\rho_a L \text{ para um comprimento } L, \text{ assim}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0\rho_{Sa}2\pi\rho_a L}{\rho_{Sa}\rho_a \ln \frac{\rho_b}{\rho_a}} \rightarrow \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{\rho_b}{\rho_a}}$$

d) *O trabalho é zero, pois o potencial só depende da distância e os dois pontos estão na mesma posição ρ_C*

Duas placas condutoras seminfinitas são colocadas perpendiculares entre si no plano $y=0$ e $z=0$ conforme o desenho. Uma carga q é colocada na posição $(0,a,b)$.

- Calcule a densidade superficial de carga nos dois planos.
- Calcule a carga total sobre cada plano.

a)

As cargas imagem que fazem com que o potencial seja zero nos dois planos estão na figura

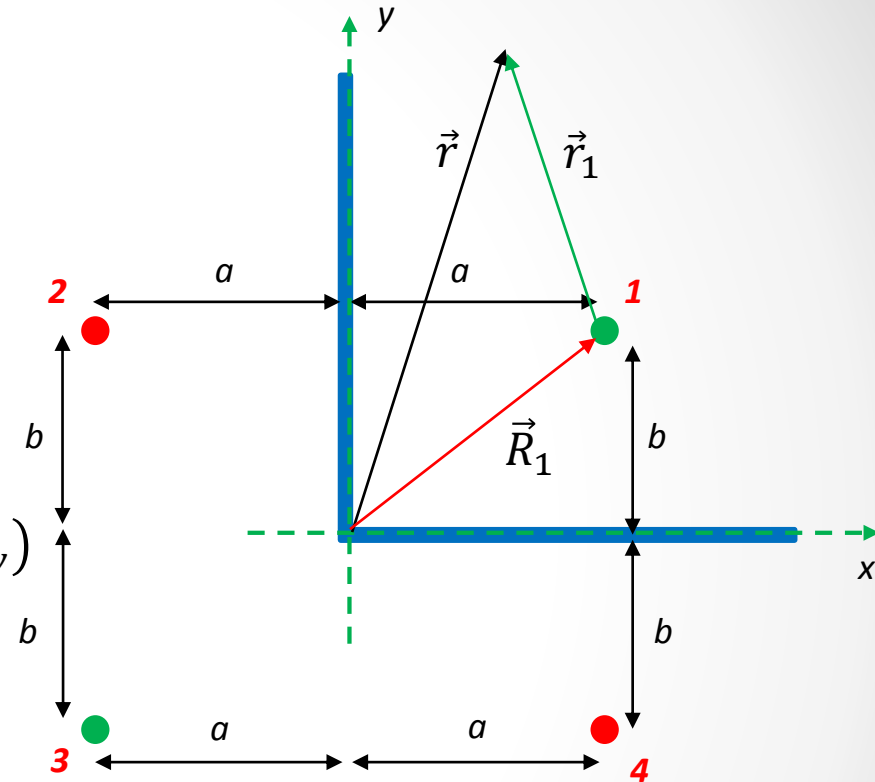
O campo elétrico total na região da carga é calculado a partir da soma dos campos de cada carga.

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{R}_1 = (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z) - (a\hat{a}_x + b\hat{a}_y)$$

$$\vec{r}_1 = (x - a)\hat{a}_x + (y - b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\hat{r}_1 = \frac{(x - a)\hat{a}_x + (y - b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2}}$$

$$\vec{E}_1 = k \frac{q}{|\vec{r}_1|^2} \hat{r}_1 = k \frac{q}{((x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2)^{3/2}} [(x - a)\hat{a}_x + (y - b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z]$$



Continua

Continuação

Calculando o campo para todas as cargas:

$$\begin{aligned}\vec{E}_T = & k \frac{q}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2)^{3/2}} [(x-a)\hat{a}_x + (y-b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z] + \\ & + k \frac{-q}{((x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2)^{3/2}} [(x+a)\hat{a}_x + (y-b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z] \\ & + k \frac{q}{((x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2)^{3/2}} [(x+a)\hat{a}_x + (y+b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z] \\ & + k \frac{-q}{((x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2)^{3/2}} [(x-a)\hat{a}_x + (y+b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z]\end{aligned}$$

Para calcularmos a densidade de carga no plano condutor, próximo ao campo $E = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}$

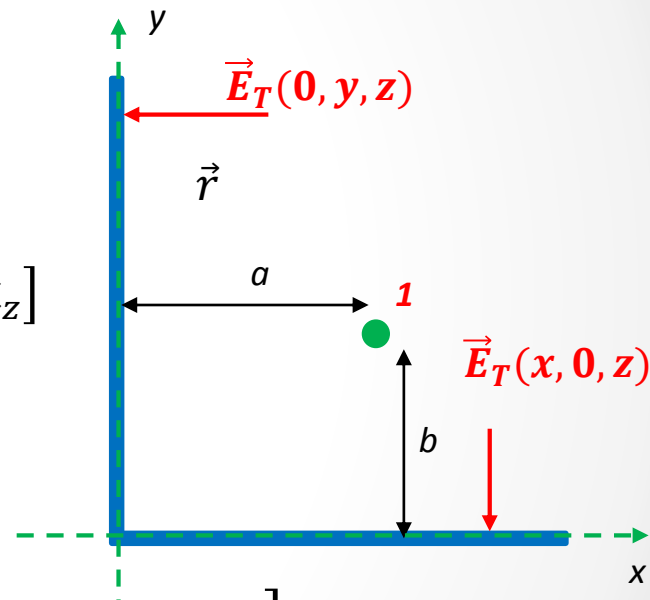
Desta forma, para calcularmos a densidade de carga no plano vertical, calculamos o campo elétrico para $x=0$

Continua

Continuação

Calculando o campo para todas as cargas:

$$\begin{aligned}\vec{E}_T(0, y, z) = & k \frac{q}{(a^2 + (y - b)^2 + z^2)^{3/2}} [(-a)\hat{a}_x + (y - b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z] + \\ & + k \frac{-q}{(a^2 + (y - b)^2 + z^2)^{3/2}} [a\hat{a}_x + (y - b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z] \\ & + k \frac{q}{(a^2 + (y + b)^2 + z^2)^{3/2}} [a\hat{a}_x + (y + b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z] \\ & + k \frac{-q}{(a^2 + (y + b)^2 + z^2)^{3/2}} [(-a)\hat{a}_x + (y + b)\hat{a}_y + z\hat{a}_z]\end{aligned}$$



As componentes y e z se anulam, assim:

$$\vec{E}_T(0, y, z) = k2aq \left[\frac{1}{(a^2 + (y + b)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + (y - b)^2 + z^2)^{3/2}} \right] \hat{a}_x$$

Continua

Continuação

A densidade de carga fica então:

$$\rho_S(0, y, z) = \frac{aq}{2\pi} \left[\frac{1}{(a^2 + (y + b)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + (y - b)^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

Para o plano horizontal o processo é o mesmo, assim:

$$\rho_S(x, 0, z) = \frac{bq}{2\pi} \left[\frac{1}{((x + a)^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x - a)^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

b) *Para calcular a carga total*

$$Q(x = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho_S(0, y, z) dy dz$$

$$Q(y = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho_S(x, 0, z) dx dz$$

Continua

Continuação

A densidade de carga fica então:

$$Q(x = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{aq}{2\pi} \left[\frac{1}{(a^2 + (y+b)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + (y-b)^2 + z^2)^{3/2}} \right] dy dz$$

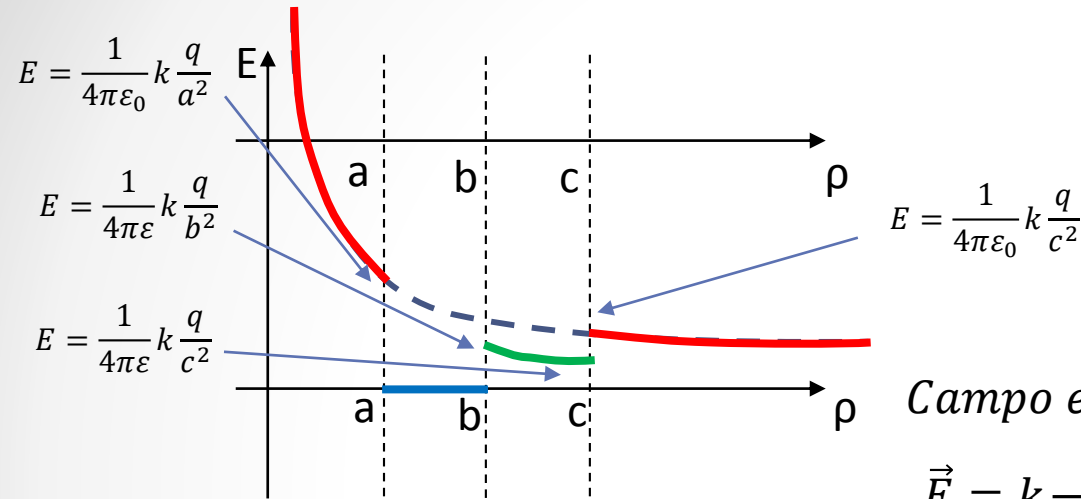
$$Q(x = 0) = \frac{aq}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-(y+b)}{(a^2 + z^2)\sqrt{a^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{-(y-b)}{(a^2 + z^2)\sqrt{a^2 + (y-b)^2 + z^2}} \right]_0^{+\infty} dz$$

$$Q(x = 0) = -\frac{aq}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2b}{(a^2 + z^2)\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \right] dz = -2\frac{baq}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(a^2 + z^2)\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \right] dz$$

$$Q(x = 0) = -2\frac{baq}{\pi} \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \frac{z}{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = -2\frac{q}{\pi} \arctan \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$Q(y = 0) = -2\frac{q}{\pi} \arctan \left(\frac{a}{b} \right)$$

3) Uma carga pontual q é colocada no centro de uma casca esférica condutora ideal de raio interno a e raio externo b . A casca condutora não está eletrizada. Uma casca dielétrica ideal (com permissividade elétrica ϵ) de raio interno b e raio externo c envolve a casca condutora. Para essa situação faça um esboço dos gráficos do módulo do campo elétrico e do potencial elétrico ao longo da direção radial. Representar as medidas a , b e c no gráfico (como na figura abaixo);



Campo elétrico de uma carga pontual

$$\vec{E} = k \frac{q}{|\vec{\rho}|^2} \hat{\rho} \qquad E = k \frac{q}{\rho^2}$$

$$r < a \qquad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k \frac{q}{\rho^2}$$

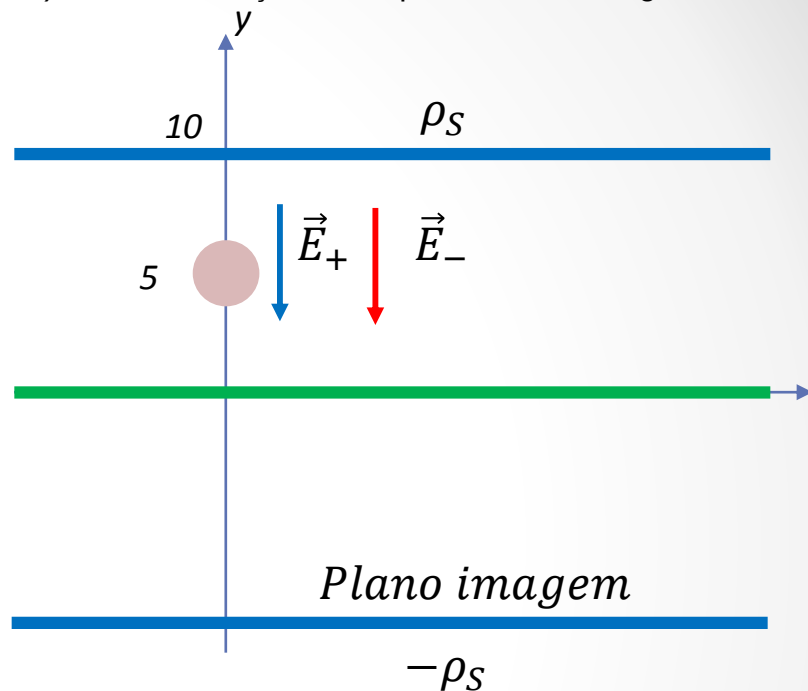
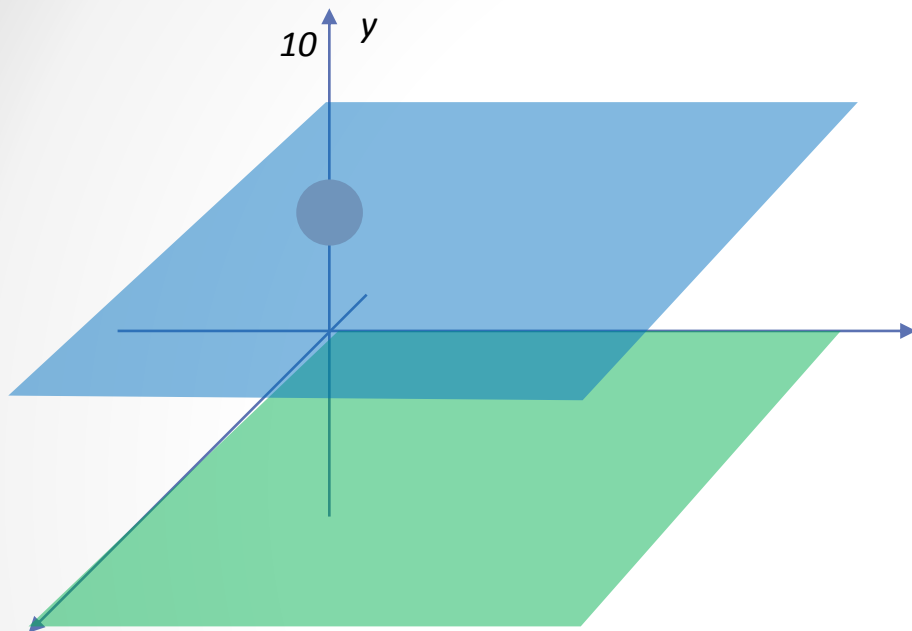
$$a < r < b \qquad E = 0$$

$$b < r < c \qquad E = \frac{1}{4\pi\epsilon} k \frac{q}{\rho^2}$$

$$r > c \qquad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k \frac{q}{\rho^2}$$

Note que o campo para $r > c$ não é afetado pela presença da casca condutora e do dielétrico, porque eles não estão carregados. O campo entre a e b é zero porque está dentro do condutor e entre b e c é menor porque $\epsilon > \epsilon_0$.

4) Considere uma lâmina de cargas infinita com $\rho_s = 1 \text{ mC/m}^2$ situada no plano x-y em $z = 10 \text{ m}$, paralelo à ele há um plano condutor ideal em $z = 0$. O plano condutor perfeito está situado em $z = 0 \text{ m}$. Uma esfera maciça com $\epsilon = \epsilon_0$, raio igual a 1 cm e densidade volumétrica de carga $\rho_v = 4 \mu\text{C/m}^3$ é colocada no ponto $(0, 0, 5)$. Calcule a força sofrida pela esfera carregada, causada pelo campo elétrico externo.



A reação do condutor à presença do plano carregado gera um campo elétrico idêntico ao de um plano imagem carregado com densidade $-\rho_s$ simetricamente posicionado com relação ao plano carregado. É como se o plano carregado e o plano espelho gerassem campo na esfera.

O campo elétrico em cima da esfera será então $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{j} + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{j} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{j}$
 A força total sobre a esfera será então

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{j} = 4 \times 10^{-6} \frac{4}{3} \pi (1 \times 10^{-2})^3 \frac{1 \times 10^{-3}}{8,85 \times 10^{-12}} \hat{j} = 1,9 \times 10^{-3} \hat{j} \text{ N}$$

5) Dado o campo $\vec{D} = \frac{5\text{sen}\theta\cos\varphi}{r} \hat{a}_r$ C/m², determine:

a) a densidade volumétrica de carga;

b) a carga total contida na região $r < 2\text{m}$;

c) o módulo de $\vec{D}$ na superfície $z = 2\text{m}$;

d) o fluxo elétrico total que deixa a superfície $r = 2$.

$$a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial(\text{sen}\theta D_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{5\text{sen}\theta\cos\varphi}{r} \right) = \frac{5\text{sen}\theta\cos\varphi}{r^2}$$

$$\rho_V = \frac{5\text{sen}\theta\cos\varphi}{r^2}$$

$$b) \quad Q = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_V(r, \theta, \varphi) r^2 \text{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{5\text{sen}\theta\cos\varphi}{r^2} r^2 \text{sen}\theta d\varphi d\theta dr$$

$$Q = \int_0^2 \int_0^\pi 5\text{sen}\theta \int_0^{2\pi} \cos\varphi \text{sen}\theta d\varphi d\theta dr = 0$$

$$c) \quad \vec{D} = \frac{5\text{sen}\theta\cos\varphi}{r} \hat{a}_r = 5\text{sen}\theta\cos\varphi \frac{1}{r} \hat{a}_r$$

$$\vec{D} = 5 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (\text{sen}\theta\cos\varphi \hat{a}_x + \text{sen}\theta\text{sen}\varphi \hat{a}_y + \cos\theta \hat{a}_z)$$

Continua

$$\vec{D} = 5 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (\sin\theta \cos\varphi \hat{a}_x + \sin\theta \sin\varphi \hat{a}_y + \cos\theta \hat{a}_z)$$

$$\vec{D} = 5 \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{a}_x + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{a}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{a}_z \right)$$

$$\vec{D} = 5 \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z)$$

Outra opção: $\hat{a}_r = \frac{(x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad x = r \sin\theta \cos\varphi \quad \sin\theta \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Para $z = 2m$

$$\vec{D}(x, y, 2) = 5 \frac{x}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} (x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + 2 \hat{a}_z)$$

$$|\vec{D}(x, y, 2)| = 5 \frac{x}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5 \frac{x}{(x^2 + y^2 + 4)}$$

c) *O fluxo é zero pois a carga total para $r < 2m$ é zero, calculado no item a.*

Continua

6) A figura mostra três distribuições de cargas no plano $z = 0$ no espaço livre.

a) Determine a carga total para cada distribuição.

b) Determine o potencial em P (0, 0, 6) causado por cada uma destas três cargas individualmente.

c) Determine o V_P total.

a) Para a barra reta

$$Q_A = \rho_{LA} L = \pi \times 10^{-9} \times 2 = 6,3 \times 10^{-9} \text{ C}$$

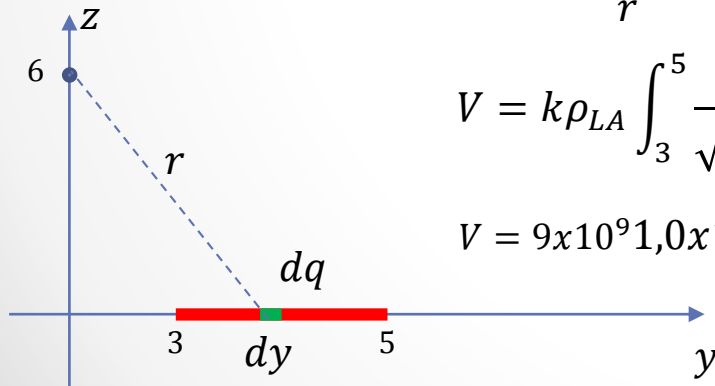
Para o arco

$$Q_B = \rho_{LB} L = 1,5 \times 10^{-9} \times \frac{\pi}{3} \times 3 = 4,7 \times 10^{-9} \text{ C}$$

Para a área

$$Q_C = \rho_{LC} S = 1,0 \times 10^{-9} \times \frac{\pi}{3} (3,5^2 - 1,6^2) = 10 \times 10^{-9} \text{ C}$$

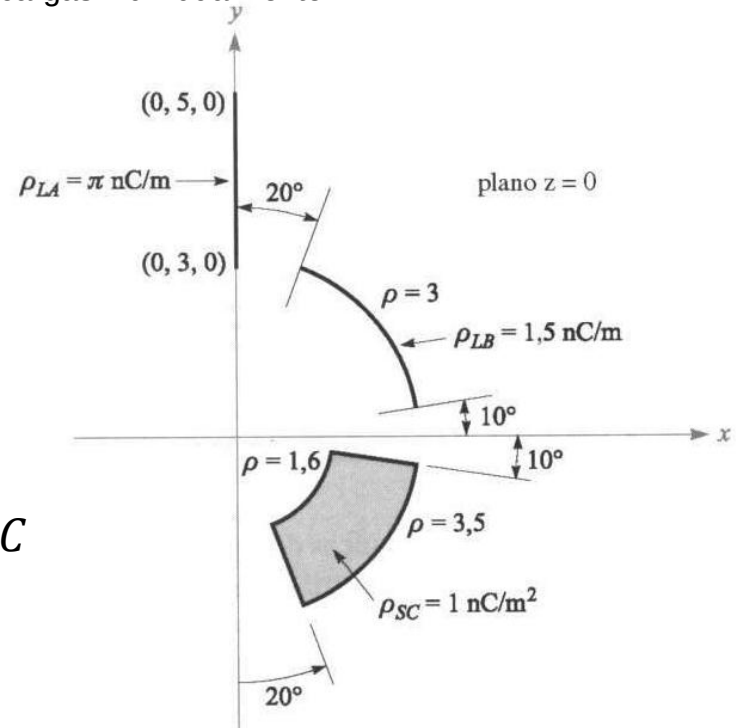
b) Para a barra reta



$$dV = k \frac{dq}{r} = k \frac{\rho_{LA} dy}{\sqrt{z^2 + y^2}}$$

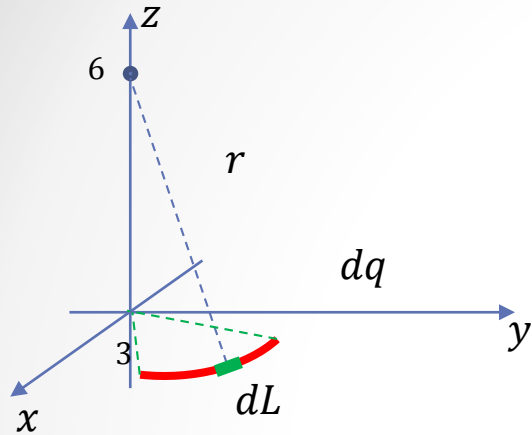
$$V = k \rho_{LA} \int_3^5 \frac{dy}{\sqrt{z^2 + y^2}} = k \rho_{LA} \ln \left(\frac{\sqrt{z^2 + y^2} + y}{z} \right) \Big|_3^5$$

$$V = 9 \times 10^9 \times 1,0 \times 10^{-9} \ln \left(\frac{\sqrt{6^2 + 5^2} + 5}{\sqrt{6^2 + 3^2} + 3} \right) = 2,5 \text{ V}$$



Continua

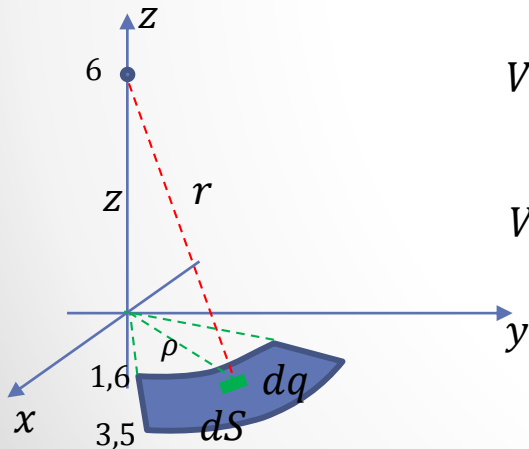
Para o arco



$$dV = k \frac{dq}{r} = k \frac{\rho_{LB} dL}{\sqrt{z^2 + y^2}} \quad V = k \rho_{LB} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{6\pi}{18}} \frac{R d\phi}{\sqrt{R^2 + z^2}} = k \rho_{LB} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \frac{\pi}{3}$$

$$V = 9 \times 10^9 1,5 \times 10^{-9} \frac{3}{\sqrt{3^2 + 6^2}} \frac{\pi}{3} = 6,3 \text{ V}$$

Para a área



$$dV = k \frac{dq}{r} = k \frac{\rho_{SC} dS}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$V = k \rho_{SC} \int_{1,6}^{3,5} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{6\pi}{18}} \frac{\rho d\phi d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = k \rho_{LB} \frac{\pi}{3} \ln \left(\frac{\sqrt{z^2 + \rho^2} + \rho}{z} \right) \Big|_{1,6}^{3,5}$$

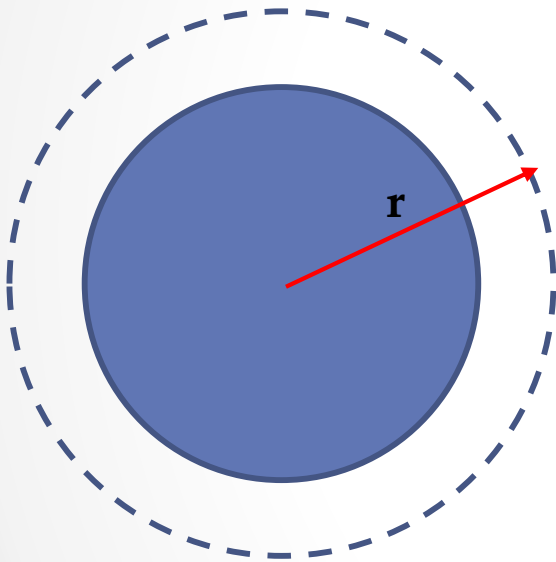
$$V = 9 \times 10^9 1,0 \times 10^{-9} \frac{\pi}{3} \ln \left(\frac{\sqrt{6^2 + 3,5^2} + 3,5}{\sqrt{6^2 + 1,6^2} + 1,6} \right) = 2,8 \text{ V}$$

$$V_T = V_A + V_B + V_C = 11,6 \text{ V}$$

7) Uma esfera de cobre de raio 4 cm possui uma carga total de 5 μC uniformemente distribuída pela sua superfície no espaço livre.

- (a) Use a lei de Gauss para determinar D externa à esfera.
- (b) Calcule a energia total armazenada no campo eletrostático.
- (c) Use $W_E = Q^2/2C$ para calcular a capacitância da esfera isolada.

a) Por simetria o campo elétrico é radial e tem o mesmo módulo à uma mesma distância do centro da esfera, assim, traçamos uma gaussiana esférica.



$$\Phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint D dS = E 4\pi r^2$$

$$\Phi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{Int} \quad D 4\pi r^2 = q_{Int} = Q \quad D = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}$$

b) Energia por unidade de volume $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_0}$

$$U = \int u dV = \int \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_0} dV = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_R^\infty \left(\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q^2}{4\pi} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^\infty = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

Continua

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} = \frac{9 \times 10^9}{2} \frac{(5 \times 10^{-6})^2}{4 \times 10^{-2}} = 2,8 \text{ J}$$

c) Se 2,8J é a energia eletrostática das cargas da esfera

$$U = \frac{Q^2}{2C} \rightarrow C = \frac{Q^2}{2U} = \frac{(5 \times 10^{-6})^2}{2 \times 2,8} = 4,5 \times 10^{-12} \text{ F} = 4,5 \text{ pF}$$

8) O hidrogênio contém $5,5 \times 10^{25}$ átomos/m³ em uma certa temperatura e pressão. Quando um campo elétrico de 4 kV/m é aplicado, cada dipolo formado pelos elétrons e pelo núcleo positivo possui um comprimento efetivo de $7,1 \times 10^{-19}$ m. Determine:

(a) P ;

(b) ϵ_R .

O módulo do vetor polarização é o momento de dipolo por volume

(a)

$$P = \frac{\sum p}{V} \quad p = qd = 1,6 \times 10^{-19} \times 7,1 \times 10^{-19} = 1,1 \times 10^{-37} \text{ Cm}$$

$$P = 5,5 \times 10^{25} \times 1,1 \times 10^{-37} = 6,0 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2$$

(b)

$$P = \epsilon_0 \chi E \rightarrow \chi = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{6,0 \times 10^{-12}}{8,85 \times 10^{-12} \times 4,0 \times 10^3} = 1,7 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_R = 1 + \chi = 1,0002$$

9) Um campo potencial $V = 200 - 50x^2 + 20y^2$ V é medido em um material dielétrico para o qual $\epsilon_R = 2,1$, determine:

(a) $\vec{E}$; (b) $\vec{D}$; (c) $\vec{P}$; (d) ρ_L ; (e) ρ_P ; (f) ρ_T .

a)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z = -100x\hat{a}_x + 40y\hat{a}_y \text{ V/m}$$

b)

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_R\epsilon_0\vec{E} = 2,1 \times 8,85 \times 10^{-12}(-100x\hat{a}_x + 40y\hat{a}_y) = (-1,8x\hat{a}_x + 0,74y\hat{a}_y) \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

c)

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E} \quad \chi = \epsilon_R - 1 = 2,1 - 1 = 1,1$$

$$\vec{P} = 8,85 \times 10^{-12} 1,1(-100x\hat{a}_x + 40y\hat{a}_y) = (-0,94x\hat{a}_x + 0,39y\hat{a}_y) \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

d)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = (-1,8 + 0,74) \times 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^3} = -1,1 \times 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \quad \rho_L = -1,1 \times 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

e)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_P = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = (-0,94 + 0,39) \times 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^3} = -0,55 \times 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \quad \rho_P = 0,55 \times 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

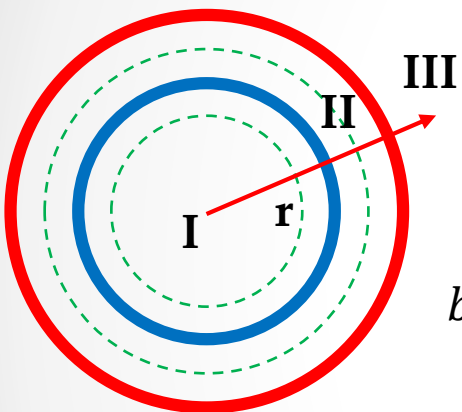
f)

$$\rho_T = \rho_L + \rho_P = -1,1 \times 10^{-9} + 0,55 \times 10^{-9} = -0,55 \times 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

10) Um cabo coaxial é construído usando um cilindro maciço e um casca cilíndrica fina concêntricos. Considere um cabo coaxial infinito com o fio de raio a e a casca de raio b.

- a) Calcule o vetor campo elétrico em todo o espaço, em coordenadas cilíndricas, se o cilindro tem densidade linear λ e a casca $-\lambda$.
- b) Calcule a diferença de potencial entre o cilindro e a casca.
- b) Calcule a capacitância por unidade de comprimento, deste sistema.

a) *Solução idêntica ao exercício 1*



$$E_I = 0$$

$$E_{II} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad E_{III} = 0$$

b)

$$V_a - V_b = - \int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

c)

$$q = \lambda L$$

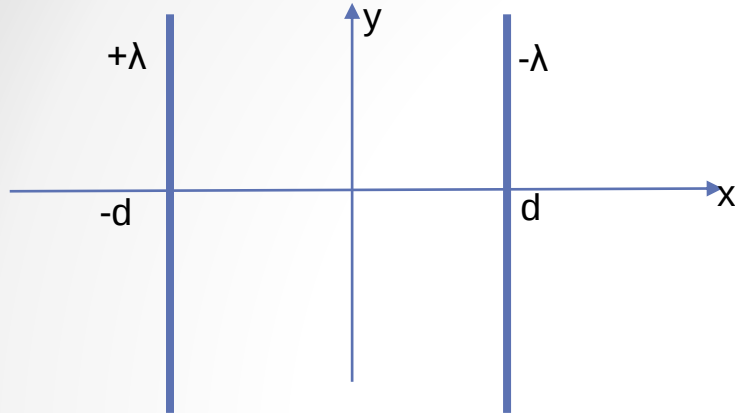
$$\Delta V = \frac{q}{C} \rightarrow C = \frac{q 2\pi\epsilon_0}{\lambda \ln \frac{b}{a}}$$

$$C = \frac{\lambda L 2\pi\epsilon_0}{\lambda \ln \frac{b}{a}} \rightarrow \frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

11) Dois fios de comprimento infinito dispostos paralelamente ao eixo x têm densidades de carga uniforme $+\lambda$ e $-\lambda$.

(a) Encontre o potencial em qualquer ponto (x, y, z) usando a origem como referência.

(b) Mostre que as superfícies equipotenciais são cilindros circulares e encontre o eixo e o raio do cilindro que correspondem a um dado potencial V_0 .



Coordenadas cilíndricas

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - (-\vec{d}) = (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y) + d\hat{a}_x$$

$$\vec{r}_- = \vec{r} - \vec{d} = (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y) - d\hat{a}_x$$

$$\vec{r}_+ = (x + d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y$$

$$\vec{r}_- = (x - d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y$$

$$\hat{r}_+ = \frac{(x + d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y}{\sqrt{(x + d)^2 + y^2}}$$

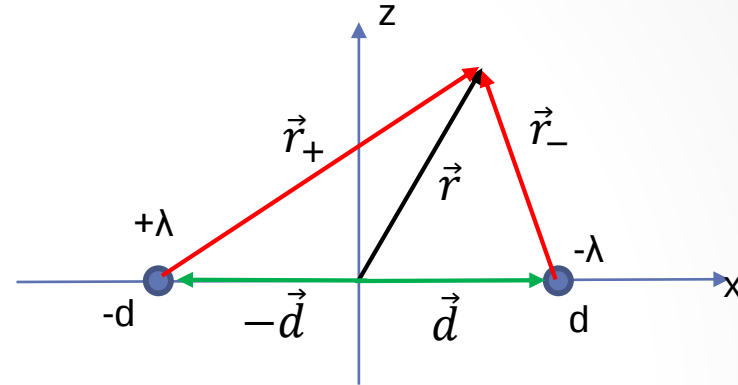
$$\hat{r}_- = \frac{(x - d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y}{\sqrt{(x - d)^2 + y^2}}$$

$$\vec{E}_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|\vec{r}_+|}\hat{r}_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{((x + d)^2 + y^2)}[(x + d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y]$$

$$\vec{E}_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|\vec{r}_-|}\hat{r}_- = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0|\vec{r}_+|}\frac{1}{((x - d)^2 + y^2)}[(x - d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y]$$

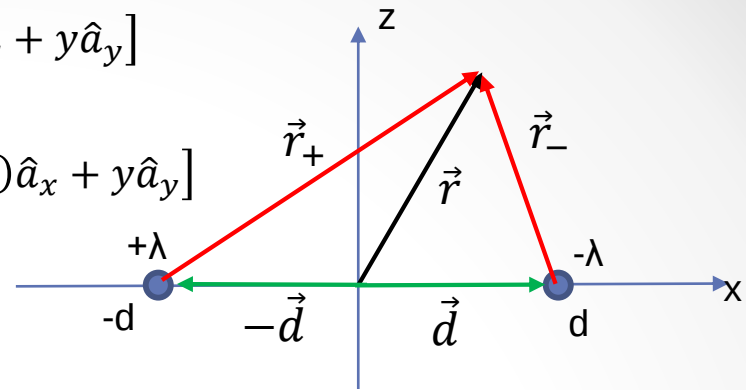
Continua

a) Olhando de frente



$$\vec{E}_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|\vec{r}_+|}\hat{r}_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{((x+d)^2 + y^2)}[(x+d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y]$$

$$\vec{E}_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|\vec{r}_-|}\hat{r}_- = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0|\vec{r}_+|}\frac{1}{((x-d)^2 + y^2)}[(x-d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y]$$



$$\vec{E}_T = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{((x+d)^2 + y^2)} [(x+d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y] - \frac{1}{((x-d)^2 + y^2)} [(x-d)\hat{a}_x + y\hat{a}_y] \right]$$

Campo Elétrico total gerado pelos dois fios

$$\vec{E}_T = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{(x+d)}{((x+d)^2 + y^2)} - \frac{(x-d)}{((x-d)^2 + y^2)} \right] \hat{a}_x + \left[\frac{y}{((x+d)^2 + y^2)} - \frac{y}{((x-d)^2 + y^2)} \right] \hat{a}_y \right\}$$

$$V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{Sabemos que o plano } x = 0 \text{ é um plano referencial de } V = 0$$

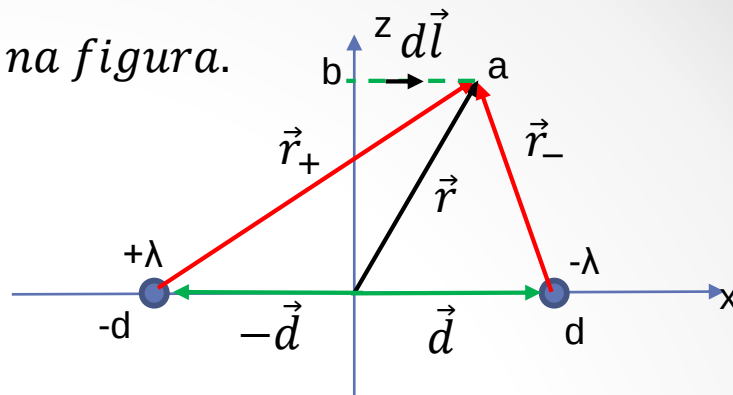
Como o campo elétrico é conservativo, podemos escolher o caminho entre um ponto do plano e o ponto que queremos calcular o V

Continua

Escolheremos então o caminho pontilhado na figura.

Desta forma: $d\vec{l} = dx\hat{a}_x$

$$V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_b^a E_x dx$$



$$V_x - V_0 = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^x \left[\frac{(x+d)}{((x+d)^2 + y^2)} - \frac{(x-d)}{((x-d)^2 + y^2)} \right] dx$$

$$V_x - V_0 = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln((x+d)^2 + y^2) - \ln((x-d)^2 + y^2) \right]_0^x \quad V_0 = 0$$

$$V_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{((x-d)^2 + y^2)}{((x+d)^2 + y^2)}$$

Continua

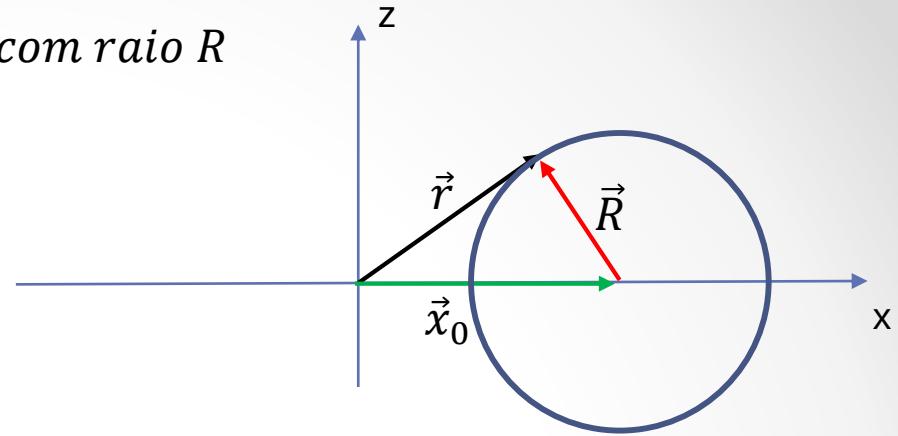
Equação de um cilindro centrado em x_0 e com raio R

$$\vec{x}_0 = x_0 \hat{a}_x$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{x}_0 = (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y) - x_0\hat{a}_x$$

$$\vec{R} = (x - x_0)\hat{a}_x + y\hat{a}_y$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$$



Mostrar que equipotencias são cilindros é mostrar que podemos chegar a uma equação desta forma

$$V_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{((x-d)^2 + y^2)}{((x+d)^2 + y^2)} \quad e^{\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}} = \frac{((x-d)^2 + y^2)}{((x+d)^2 + y^2)} = A$$

$$x^2 - 2dx + d^2 + y^2 = A(x^2 - 2dx + d^2 + y^2) \quad x^2 + \frac{(A+1)}{(A-1)} 2dx + d^2 + y^2 = 0$$

$$x_0 = -\frac{(A+1)}{(A-1)} d \quad x^2 - 2x_0x + d^2 + y^2 = 0 \quad x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 = x_0^2 - d^2$$

$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ *Para cada valor de potencial V existe uma equipotencial cilíndrica centrada em x_0 , onde*

$$x_0 = -\frac{\left(e^{\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}} + 1\right)}{\left(e^{\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}} - 1\right)} d \quad e \text{ de raio } R = \sqrt{\left[\frac{\left(e^{\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}} + 1\right)}{\left(e^{\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}} - 1\right)} d\right]^2 - d^2}$$